

## (四) 证明题(满分 10 分)

设  $0 \leq x < +\infty$  时,  $f''(x) > 0, f(0) = 0$ . 证明函数  $\frac{f(x)}{x}$

$(0, +\infty)$  单调增加. 设  $g(x) = \frac{f(x)}{x}, g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$

设  $h(x) = x f'(x) - f(x), h'(x) = f(x) + x f''(x) - f'(x) = x f''(x)$

**五、教材习题参考答案与自测题参考答案**  
 在  $x \in (0, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0 \uparrow h(x) = 0 \therefore h(x) > 0$   
 $\therefore g'(x) > 0 \therefore g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调增加

## 习题 3-1

1. 0 2.  $\frac{9}{4}$

3. 略  
4. 略

## 习题 3-2

1. 1 2. 2 3.  $\cos a$  4.  $\frac{m}{n} a^{m-n}$  5. 1 6.  $-\frac{2}{3}$  7. 1

8. 0 9. 0 ~~10. 1~~ 11. 1 12. 1 13.  $\frac{1}{2}$  14. 1 15.  $\frac{1}{2}$

16.  $-\frac{1}{2}$  17. 1 18.  $e^{-\frac{2}{3}}$  19. 1 20.  $e^{-1}$

## 习题 3-3

1. (1) 单调增加 (2) 单调增加 (3) 单调增加 (4)  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  和  $(-\infty, -1)$  为单调增加, 在  $(-1, 1)$  为单调递减  
 2. (1) 单调增区间为  $(2, +\infty)$  和  $(-2, 0)$ , 单调减区间为  $(0, 2)$  和  $(-\infty, -2)$

(2) 单调增区间为  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  和  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , 单调减区间为

$(-\infty, \frac{1}{2})$  和  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(3) 单调增区间为  $(-\infty, -2)$  和  $(2, +\infty)$ , 单调减区间为  $(-2, 0)$  和  $(0, 2)$

(4) 单调增区间为  $(-\infty, 0)$  和  $(\frac{2}{5}, +\infty)$ , 单调减区间

为  $(0, \frac{2}{5})$

## 习题 3-4

1. (1) 4 0 (2) 13, 4 (3)  $\ln 5, 0$  (4) 6, 0

2. 底面半径  $r=2$  dm, 高为 4 dm

3. 3

4. 能 5. 当  $d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$  时,  $\omega$  最大

## 习题 3-5

1. (1) 凹区间为  $(\frac{5}{3}, +\infty)$ , 凸区间为  $(-\infty, \frac{5}{3})$ , 拐点

为  $(\frac{5}{3}, \frac{520}{27})$

(2) 凹区间为  $(2, +\infty)$ , 凸区间为  $(-\infty, 2)$ , 拐点为  $(2, \frac{2}{e})$

(3) 凹区间为  $(-\infty, +\infty)$ , 无凸区间和拐点

(4) 凹区间为  $(-1, 1)$ , 凸区间为  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$ , 拐点为  $(\pm 1, \ln 2)$

(5) 凹区间为  $(-\infty, \frac{1}{2})$ , 凸区间为  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ , 拐点为

$(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{2})$

(6) 凹区间为  $(1, +\infty)$ , 凸区间为  $(-\infty, 1)$ , 拐点为  $(1, \frac{1}{e})$