A. $(-1,1)$ B. $(-3,3)$

C. $(-2,4)$ D. $(-4,2)$

8. 当条件（A）成立时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 一定发散.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散

（二）填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 的和为________.

3. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是________级数.

4. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数为________.

5. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$ 的收敛区间为 $(-9,9)$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^{2n}$ 的收敛区间为________.

（三）判断下列级数的敛散性（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$.

（四）判断下列级数的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛（每小题 8 分，共 16 分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(2n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)^2}$.

（五）求下列幂级数的收敛半径和收敛区间（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{2n}}{2^n}$.

（六）（满分 8 分，共 16 分）

1. 将函数 $f(x)=\frac{3}{2+x-x^2}$ 展成关于 x 的幂级数.

2. 将函数 $f(x)=\ln\frac{x}{1+x}$ 展成关于 $x-1$ 的幂级数.

（七）（满分 10 分）

求 $f(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ -1 & \pi<x<0\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数.

五、教材习题参考答案与自测题参考答案

习题 7-1

1. (1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2}$ (2) $\frac{(-1)^{n-1}}{4^n\cdot n!}$

(3) $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$ (4) $\frac{(-1)^{n+1}x^n}{2}$

2. (1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 收敛

3. (1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛

习题 7-2

1. (1) 发散 (2) 收敛 (3) 收敛 (4) 收敛

2. (1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 收敛

(5) $|x|\leqslant 1$ 时收敛，$|x|>1$ 时发散

3. (1) 收敛　(2) 发散　(3) 收敛　(4) 收敛
(5) 收敛　(6) 发散

4. (1) 绝对收敛　(2) 发散　(3) 条件收敛　(4) 发散
(5) $-1<x<1$ 时，绝对收敛；$x=1$ 条件收敛；$x\leqslant-1$ 或 $x>1$ 发散

习题 7-3

1. (1) $R=1$　(2) $R=1$　(3) $R=+\infty$　(4) $R=1$　(5) $R=\sqrt{2}$

2. (1) $(-1,1)$　(2) $(-3,3)$　(3) $[-1,1)$　(4) $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$

习题 7-4

1. $f(x)=\ln a+\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^n+\cdots$　$(-a<x\leqslant a)$

2. $f(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$　$(-\infty<x<+\infty)$

3. $f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$　$(-1<x<1)$

4. $f(x)=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}-\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{b^{n+1}}$　$-\min(a,b)<x<\min(a,b)$

5. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$　$(-1<x<1)$

习题 7-5

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$

2. $\frac{3}{2}\pi-\sum_{\substack{k=2n+1\\n=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi}\cos kx+\frac{2}{k^2\pi}\sin kx\right)-\frac{1}{2}\pi^2\sum_{\substack{k=2n+1\\n=1}}^{\infty}\cos kx$

自测题参考答案

(一) 选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A,D	C	C	D	B	D	A

(二) 填空题

1. 0　2. $\frac{1}{3}$　3. 发散　4. $\arctan x$　$x\in[-1,1]$

5. $(0,6)$

(三) 1. 发散　2. 收敛

(四) 1. 绝对收敛　2. 条件收敛

(五) 1. 令 $t=x-3$，则原幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 3^n}$. 收敛半径 $R=3$，收敛区间为 $[0,6]$.

2. 收敛半径 $R=\sqrt{2}$，收敛区间为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(六) 1. 解：$f(x)=\frac{3}{2+x-x^2}=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}$

$$=\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{1+x},$$

而 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$　$(|x|<1)$，

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad(|x|<2),$$

$$f(x)=\frac{3}{2+x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right]x^n\quad(-1<x<1).$$

2. 解：$f(x)=\ln\frac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)$